第 5 章　微分法の応用

キーワード
不定形の極限、べき級数、Taylor,　Maclaurin 展開

5.1　不定形の極限値

微分法は不定形の極限を求めるのに非常に役に立つ。ここで、不定形とは

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{0} \tag{5.1}$$

または

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\infty}{\infty} \tag{5.2}$$

例えば、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$　あるいは　$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{2+x^2}=\frac{\infty}{\infty}$　などが上げられる。このような不定形の極限に対して、次の定理が成り立つ（ロピタルの定理）

もし $\lim_{x\to a} f(x)=0$ および $\lim_{x\to a} g(x)=0$ であるとき、$\lim_{x\to a} f'(x)$ および $\lim_{x\to a} g'(x)$ が有限な値に収束するならば、

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} \tag{5.3}$$

である。つまり、分母分子をそれぞれ x について微分し、極限を取った結果と同じ値になる。

（証明）

$\varepsilon = x-a$ とおいて変数を x から ε に移し、$x\to a$ という操作を $\varepsilon\to 0$ の操作に変える。

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(a+\varepsilon)-g(a)}{f(a+\varepsilon)-f(a)}$$

と書ける。　なぜなら、$g(a)=0$、$f(a)=0$ であるから。したがってこの極限は次の形に書ける。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\dfrac{g(a+\varepsilon)-g(a)}{\varepsilon}}{\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}} = \frac{g'(a)}{f'(a)} \tag{5.4}$$

つまり、分母と分子をそれぞれ x で微分し、x に a を代入した結果と同じになる。

次の基本パターンとして

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

になる場合を考える。
コーシーの平均値の定理により、

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ を満たす ξ が $a < x < \xi < x_0$ の範囲に存在する。左辺を変形すると、

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)\left(1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

これから、
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}$$

と表せるが、ここで、x_0 を十分 a に近づけると $x \to a$ の状態となり、$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ および $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ の条件より、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{5.5}$$

として求めることができる。

次の不定形のタイプは

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ かつ $g(x) = \infty$ で

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0\times\infty \tag{5.6}$$

となる場合。

この場合は、式を変形して$\dfrac{0}{0}$か$\dfrac{\infty}{\infty}$の形に変形して極限を取る。例えば、

$f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$　あるいは　$f(x)g(x) = \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$　のように変形して

から極限を取る。

例 1　$\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = \infty$

例 2　$\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^{n-1}} = 0$　　n は自然数

例 3　$\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(x^n\log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-n}{x^{n+1}}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^n}{n} = 0$

例 4　$\displaystyle \lim_{x\to 0} x^x$ は 0^0 の形である。これの対数を取って極限を求めると、$\displaystyle \lim_{x\to 0} x\log x$　である

が、これは$0\times\infty$の形をしている。したがって、

$\displaystyle \lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0,$　となり、対数を戻すと

$\displaystyle \lim_{x\to 0} x^x = 1$

例 5　$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\cos x\right)$　であるが、$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(1+\cos x\right) = undefined$　であり、値

は定まらないのでこの方法では極限値は得られない。しかしながら、

$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$として極限値は確かにある。

例 6　$\infty-\infty$ の形

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{\left(x+x^2\right)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+\left(x+x^2\right)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x+(1+2x)\cos x+(1+2x)\cos x-\left(x+x^2\right)\sin x}=\frac{2}{1+1}=1$$

5.2　数列と級数

数の並び

$$u_1,u_2,u_3,.....u_n \tag{5.7}$$

を**数列**という。ここで並びと言っても、並び方に何らかの規則がある場合である。例えば、

$1,2,3,4,......,n$　　$1^2,2^2,3^2,4^2,......,n^2$　　$\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},.........,\frac{1}{k}$　のような並びである。

このような数の並びで要素が無数にある場合を**無限数列**という。
無限数列における最初のｎ個の和を**部分和**という。

$$s_n=u_1+u_2+u_3+.....+u_n \tag{5.8}$$

無限数列　$u_1,u_2,u_3,.....u_n,........$　から部分和をつくり、無限個の部分和を並べた別の数列

$$s_1,s_2,s_3,........,s_n...... \tag{5.9}$$

を考える。
この無限数列の無限番の要素がある値に収束するなら、

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s \tag{5.10}$$

このとき、無限級数　　$u_1+u_2+u_3+.....+u_n+.......$

は**収束し、和** s **を持つ**という。このとき、

$$s=u_1+u_2+u_3+.....+u_n+....... \tag{5.11}$$

と書く。

隣同士の比が一定値 r である場合、

$$a + ar + ar^2 + ... \tag{5.12}$$

を**無限等比級数**という。このばあい、有限個の部分和は

$$s_n = \frac{a\left(1 - r^{n-1}\right)}{1 - r} \tag{5.13}$$

であるので、$|r| < 1$ であれば $n \to \infty$ のとき無限級数は収束しその和は

$$s = \frac{a}{1 - r} \tag{5.14}$$

である。今の議論は等比級数の各項が複素数であっても成立する。例えば、

$$r = r_0 e^{i\theta} \qquad 0 < r_0 < 1 \tag{5.15}$$

なら、

$$s = \frac{a}{1 - r_0 e^{i\theta}} = \frac{a\left(1 - r_0 e^{-i\theta}\right)}{1 - 2r_0 \cos\theta + r_0^{\,2}} \tag{5.16}$$

が得られる。これは、波の無限回反射などで生じる干渉効果で現れる式である。

無限級数が収束するかどうかの判定法にコーシーの判定法とダランベールの判定法がある。コーシーの判定法では、無限級数において、有限番号以降の項について

$$\sqrt[n]{u_n} < 1 \tag{5.17}$$

であることが収束の必要十分条件である。また、ダランベールの判定法では、ある有限番の項以降で

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \tag{5.18}$$

が成り立つことである。

例 7

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の場合、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ なので全ての x について収束する。

例 8

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ の級数の場合　$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+1}=x$　したがって、$|x|<1$ なら収束する。

5.3　べき級数による関数の近似　Taylor 級数、Maclaurin 級数

変数 x の有限なベキの和で与えられる n 次多項式は x のある値 α を中心として $(x-\alpha)$ の n 次のベキで表すことができる。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+........+a_nx^n \tag{5.19}$$

なら

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3+.....+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \tag{5.20}$$

の関係がある。多項式以外の関数で n 階まで微分可能であれば、この関数を

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+.....+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+R_n(x) \tag{5.21}$$

の形に表すことができる。ここで、$R_n(x)$ を**余剰項**といい、級数展開を n 次まで取ったときの誤差を与える。ここで、もし関数 $f(x)$ が無限回微分可能であり、$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ なら、この関数は $(x-\alpha)$ の無限次のベキ級数に展開できる。つまり、

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+.....+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+... \tag{5.22}$$

である。関数のこの級数表示を**テーラー級数（Taylor）**という。また、特に $\alpha=0$ で余剰項が $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ を満たすなら、

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+.....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+..... \tag{5.23}$$

を**マクローリン級数（Maclaurin）**という。

関数 $f(x)=e^x$ に対して、マクローリン級数への展開を試みる。まず、 $f^{(n)}(0)=1$ であるので

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^n}{n!}+..... \tag{5.24}$$

となる。こので、この級数は確かに収束し、級数の和を持つ。この級数の和が確かに e^x に等しいかどうかは剰余項を見ればよい。もし剰余項が $n\to\infty$ でゼロに収束すれば関数の級数展開は完全である。剰余項は

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (0<\theta<1)$$

であたえられるが、$\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ は無限級数の一般項なのでゼロに近づく。また、$1<e^{\theta x}<e^x$ なので $e^{\theta x}$ は有界である。したがって、剰余項はゼロに収束し、展開は完全である。

同様に、

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-........+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...... \tag{5.25}$$

および

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-..........+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...... \tag{5.26}$$

が得られる。

ニュートンの二項級数

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+........+\frac{m(m-1)....(m-n+1)}{n!}x^n+.... \tag{5.27}$$

は　$|x|<1$　に対して収束する。

また、$\log x$　は $x=0$ で∞に発散する。微分係数もここでは存在しない。したがって、$\log(1+x)$ であれば展開できる。$-1<x\leq 1$ においては次の級数が収束する。ただし、収束は遅い。

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-..........+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+... \tag{5.28}$$